**Уважаемые студенты!**

 **По дисциплине ЕН.01 Математика каждый студент заочник должен изучить теоретические вопросы по темам:**

**№1 « Теория пределов и непрерывность»**

**№2 «Основы дифференциального исчисления»**

**№3 «Основы интегрального исчисления»**

**№4 «Линейная алгебра»**

**№5 «Элементы теории вероятностей»**

**Вам в помощь некоторый теоретический материал изложен ниже, после практических занятий. Можете воспользоваться любым другим ресурсом**

**Кроме того необходимо выполнить практическую часть. Студенты успешно выполнившие весь объем практической части автоматически получают зачет с оценкой по дисциплине**

**Практическое занятие №1**

 **«Теория пределов и непрерывность функций»**

Каждому студенту найти по 4 любых предела (всего 8) из заданий №1и2.Скриншоты переслать на электронный адрес *vivan62@list.ru*

Задание №1. Найти пределы функций

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |

Задание №2.Найти пределы функций

.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Практическое занятие №2.**

 **«Вычисление производной функции Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.»**

Каждому студенту выполнить задания №1и2.Скриншоты переслать на электронный адрес *vivan62@list.ru*

*Задание 1*.Найти производные следующих функций (любые 4 из первой десятки и любые 4 из второй десятки (всего 8))

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** |  |
| **2.** |   |
| **3.** |   |
| **4.** |  |
| **5.** |   |
| **6.** |   |
| **7.** |   |
| **8.** | . |
| **9.** |   |
| **10.** |   |
| **11.** | y=sinxcosx |
| **12.** | y=ex cosx  |
| **13.** | y=x3 tgx  |
| **14.** | y=x5 lnx  |
| **15.** | y=2x sinx |
| **16.** | y=tg5x  |
| **17.** | y=sin3x |
| **18.** | y =(2x+5)10 |
| **19.** | y=e3x  |
| **20.** | y=ln5x |

*Задание.2* Найдите наименьшее и наибольшее значения любых 3 функций , размещенных ниже разобранного примера

**Пример** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  на промежутке .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №шага | План нахождения  и на | Применение плана |
| 1 | Находим производную функции |  |
| 2 | Находим критические точки функции | , , или , - критические точки функции |
| 3 | Выбираем критические точки, лежащие внутри  |  |
| 4 | Находим значения функции в критических точках (внутри данного отрезка) и на концах отрезка |  |
| 5 | Из найденных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее | ,  |

1) , ;

2) , ;

3) , ;

4) , ;

5) , ;

**Практическое занятие №3**

 **«Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённых интегралов.»**

Каждому студенту выполнить задания №1и2.Скриншоты переслать на электронный адрес *vivan62@list.ru*

1.Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

(любые 3 )

1. ;
2. ;
3. ;
4. 
5. 
6. ;
7. 
8. ;
9. .

2.Выполнить один (любой) вариант заданий.

Вариант 1.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: .
2. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, вычисляется



а) ;

б) ;

в) .

Вариант 2.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: .
2. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, вычисляется



а) ;

б) ;

в) .

Вариант 3.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: .
2. Площадь фигуры, ограниченной линиями , равна:

а) ; б) 4; в) .

Вариант 4.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: .
2. Площадь фигуры, ограниченной линиями , равна:

а) ; б) ; в) .

**Практическое занятие №4.**

 **«**Операции над матрицами. Вычисление определителей**.»**

Каждому студенту выполнить задания №1,2 и 3.Скриншоты переслать на электронный адрес *vivan62@list.ru*

Задание №1. Вычислить 5А - 2В.(любой 1 вариант)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вар. | А | В | Вар. | А | В |
| 1 |  |  | 6 |  |  |
| 2 |  |  | 7 |  |  |
| 3 |  |  | 8 |  |  |
| 4 |  |  | 9 |  |  |
| 5 |  |  | 10 |  |  |

Задание 2. Умножить матрицы(любой один вариант, в каждом варианте два произведения)

вариант

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | ; | ; |
| 2 | ; | ; |
| 3 | ; | в) . |
| 4 | ; | ; |
| 5 | ; | ; |
| 6 | ; | ; |
| 7 | ; | ; |
| 8 | ; | ; |
| 9 | ; | ; |
| 10 | ; | ; |

Задание № 3. Вычислить определители(любой один вариант, в каждом варианте два определителя)

:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| вар |  |  | вар |  |  |
| **1.** | ; | ; | **6.** | ;  | ; |
| **2.** | ; | ; | **7.** | ;  | ; |
| **3.** | ; | ; | **8.** | ; | ; |
| **4.** | ; | ; | **9.** | ; | ; |
| **5.** | ; | ; | **10** | ;  | ; |

**Практическое занятие №5.**

**« Элементы теории вероятностей и математической статистики»**

Каждому студенту выполнить любой один вариант. Скриншоты переслать на электронный адрес *vivan62@list.ru*

**Вариант 1.**

1. Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию; в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины  по закону ее распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке – вероятности возможных значений). Составить функцию распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
|  | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |

**Вариант 2.**

1. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны всевозможные значения, во второй строке- вероятности возможных значений). Составить функцию распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 1,4 | 2,2 | 3,5 | 4,1 | 5,2 |
| pi | 0,3 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |

**Вариант 3.**

1. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны всевозможные значения, во второй строке- вероятности возможных значений). Составить функцию распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 120 | 135 | 150 | 180 | 185 |
| pi | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

**Вариант 4.**

1. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны всевозможные значения, во второй строке- вероятности возможных значений). Составить функцию распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 10 | 13 | 17 | 19 | 22 |
| pi | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,1 |

**Вариант 5.**

1. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны всевозможные значения, во второй строке- вероятности возможных значений). Составить функцию распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 12 | 14 | 18 | 24 | 27 |
| pi | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |

**Тема№1 « Теория пределов и непрерывность»**

**1. Вопросы занятия:**

1.1. Числовая последовательность

1.2. Предел последовательности

1.3. Функция. Предел функции

1.4. Теоремы о пределах функций

1.5. Непрерывность функций

1.6. Замечательные пределы

**2. Литература.**

**Основная литература**

1.Седых И.Ю.Математика [электронный курс]: [Текст]: учебник и практикум для СПО/И.Ю.Седых.-М.: Издательство Юрайт,2017.-443с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/CAB1548F-63AC-4C3F-8E82-C9B841E8F0A1#page/2>

2.Дорофеева В.А. Математика[электронный курс]: [Текст]: учебник для СПО/В.А.Дорофеева.-М.: Издательство Юрайт,2017.-400с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F#page/4>

3.Богомолов Н.В.Математика.Ззадачи с решениями. В 2ч.Ч.2[электронный курс]: [Текст]:учебное пособие для СПО /Н.В.Богомолов.-М.: Издательство Юрайт,2017.-285с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/0523A6DF-2657-4F49-8ACE-1B790E30D8C8#page/2>

**Дополнительная литература**

 1. Богомолов Н.В. Математика [Текст]: учебник для СПО / Н.В. Богомолов.- М.: Юрайт, 2015.- 396 с.

**3. Краткое содержание вопросов**

*3.1. Числовая последовательность*

Множество чиселкоторое определено для каждого натурального числа с одинаковым правилом называют *числовой последовательностью*и обозначают , где – члены числовой последовательности, – *общий член последовательности.*

*Возрастающая последовательность*– каждый ее член больше предыдущего



*Неубывающая последовательность* – каждый следующий член не меньший от предыдущего

*Невозрастающая последовательность* – каждый старший член не больше предыдущего

*Ограниченная последовательность* имеет место тогда, когда найдутся такие действительные числа и , что для всех натуральных чисел выполняется неравенство

*3.2. Предел последовательности.*

Число называется *пределом числовой последовательности*, если для любого сколь угодно малого положительного числа найдется такое натуральное число , что при всех выполняется неравенство

Последовательность называется *неограниченной*, если она постоянно или растет или убывает.

Последовательность, имеющая предел называется *сходящейся.* Противоположная к ней последовательность - соответственно *расходящейся*.

*3.3 Функция. Предел функции.*

Определение предела по Коши. Число A называется пределом функции f (x) в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, и для каждого ε > 0 существует δ > 0 такое, что для всех x, удовлетворяющих условию |x – a| < δ, x ≠ a, выполняется неравенство |f (x) – A| < ε.

Определение предела по Гейне. Число A называется пределом функции f (x) в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, и для любой последовательности такой, что сходящейся к числу a, соответствующая последовательность значений функции сходится к числу A.

*3.4. Теоремы о пределах функций*

1.  Предел константы равен самой этой константе:

***с = с***.

2.  Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

[ *k* •  *f*(*х*)] = *k •*  *f*(*х*).

3*.*Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) пределов этих функций:

[ *f*(*х*) ± *g* (*х*)] =   *f*(*х*) ±  *g* (*x*).

4.  Предел произведения функций равен произведению пределов этих функций:

[ *f*(*х*) • *g* (*х*)] =   *f*(*х*) •  *g* (*x*).

5.  Предел отношения двух функций равен отношению пределов этих функций, если только предел делителя не равен нулю:



*3.5. Непрерывность функций*

Если функция *у = f* (*х*) удовлетворяет условию  *f*(*х*)  = *f*(*a*),то она называется *непрерывной* в точке *х = а*.

Если же   указанное   условие не выполняется, то функция  *f*(*х*) называется *разрывной* в точке *х = а*.'

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке, в которой они определены.

Функция *у* = *f*(*х*) называется *непрерывной в интервале* (*а, b*), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

**Тема №2 «Основы дифференциального исчисления»**

**1. Вопросы занятия:**

1.1. Производная, ее геометрический и механический смысл

1.2. Правила и формулы дифференцирования

1.3. Исследование функций методами дифференциального исчисления

1.4. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям

**2. Литература.**

**Основная литература**

1.Седых И.Ю.Математика [электронный курс]: [Текст]: учебник и практикум для СПО/И.Ю.Седых.-М.: Издательство Юрайт,2017.-443с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/CAB1548F-63AC-4C3F-8E82-C9B841E8F0A1#page/2>

2.Дорофеева В.А. Математика[электронный курс]: [Текст]: учебник для СПО/В.А.Дорофеева.-М.: Издательство Юрайт,2017.-400с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F#page/4>

3.Богомолов Н.В.Математика.Ззадачи с решениями. В 2ч.Ч.2[электронный курс]: [Текст]:учебное пособие для СПО /Н.В.Богомолов.-М.: Издательство Юрайт,2017.-285с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/0523A6DF-2657-4F49-8ACE-1B790E30D8C8#page/2>

**Дополнительная литература**

 1. Богомолов Н.В. Математика [Текст]: учебник для СПО / Н.В. Богомолов.- М.: Юрайт, 2015.- 396 с.

**3. Краткое содержание вопросов**

*3.1. Производная, ее геометрический и механический смысл.*

**Производной**от функции в точке называется [предел](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_9.php) отношения приращения функции к приращению аргумента   при, если он существует, то есть:



или



Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Функция имеет производную на интервалеили называется *дифференцируемой* в этом интервале, если производная существует в каждой точке этого интервала.

Если функция имеет конечную производную в точке , то она непрерывна в этой точке.

*Геометрический смысл производной*

Производная функции , вычисленная при заданном значении , равна тангенсу угла, образованного положительным направлением оси и положительным направлением касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой :





*Механический смысл производной*

Пусть задан путь движения материальной точки. Скорость данной материальной точки в момент времени есть производная от пути по времени :



*3.2. Правила и формулы дифференцирования*

Правила дифференцирования:

*1) (с) ' = 0, (cu) ' = cu';*

*2) (u+v)' = u'+v';*

*3) ( uv)' = u'v+v'u;*

*4) (u/v)' = (u'v-v'u)/v 2;*

5) если y = f(u), u = ϕ(x), т.е. y = f(ϕ(x)) - *сложная функция,* или *суперпозиция*, составленная из дифференцируемых функций ϕ и f, то , или

;

6) если для функции y = f(x) существует обратная дифференцируемая функция

 x = g(y), то.

*Формулы дифференцирования
*

*3.3. Исследование функций методами дифференциального исчисления*

*Признаки возрастания/убывания монотонной функции*

Если производная функции на некотором промежутке , то функция возрастает на этом промежутке; если же на промежутке , то функция убывает на этом промежутке.

**Теорема**

*Необходимое условие экстремума*

Если функция имеет экстремум в точке , то ее производная либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых производная равна нулю: , называются *стационарными точками функции.*

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума для непрерывной функции, называются *критическими точками* этой функции. То есть *критические точки* - это либо стационарные точки (решения уравнения ), либо это точки, в которых производная не существует.

*Достаточное условие экстремума*

Пусть для функции выполнены следующие условия:

1. функция непрерывна в окрестности точки ;
2. или не существует;
3. производная при переходе через точку меняет свой знак.

Тогда в точке функция имеет экстремум, причем это минимум, если при переходе через точку производная меняет свой знак с минуса на плюс; максимум, если при переходе через точку производная меняет свой знак с плюса на минус.

Если производная при переходе через точку не меняет знак, то экстремума в точке нет.

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение непрерывной на отрезке функции , надо найти все максимумы (минимумы) функции на интервале и значения на концах отрезка , то есть и , и выбрать среди них наибольшее (наименьшее). Вместо исследования на максимум (минимум) можно ограничиться нахождением значений функции в критических точках.

**Теорема**

*Выпуклость и вогнутость графика функции*

Пусть функция определена на интервале и имеет непрерывную, не равную нулю в точке вторую производную. Тогда, если всюду на интервале , то функция имеет *вогнутость на этом интервале*, если , то функция имеет *выпуклость*.

**Определение**

*Точкой перегиба* графика функции называется точка , разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости.

3.4. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям

**Дифференциалом функции** называется линейная относительно часть приращения функции. Она обозначается как или . Таким образом:



Замечание

Дифференциал функции составляет основную часть ее приращения.

Наряду с понятием дифференциала функции вводится понятие дифференциала аргумента.

**Дифференциал аргумента** есть [*приращение аргумента*](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_1.php)*:*



Замечание

Формулу для дифференциала функции можно записать в виде:



Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции в точке равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в этой точке, соответствующему приращению аргумента .

# Применение дифференциала в приближенных вычислениях



Для приближенного вычисления значения функции применяется следующая формула:



**Тема №3 «Основы интегрального исчисления»**

**1. Вопросы занятия:**

1.1. Первообразная функция

1.2. Неопределенный интеграл и его свойства

1.3. Таблица неопределенных интегралов. Методы интегрирования

1.4. Определенный интеграл и его свойства

1.5. Геометрический смысл определенного интеграла. Приложения определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур

**2. Литература.**

**Основная литература**

1.Седых И.Ю.Математика [электронный курс]: [Текст]: учебник и практикум для СПО/И.Ю.Седых.-М.: Издательство Юрайт,2017.-443с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/CAB1548F-63AC-4C3F-8E82-C9B841E8F0A1#page/2>

2.Дорофеева В.А. Математика[электронный курс]: [Текст]: учебник для СПО/В.А.Дорофеева.-М.: Издательство Юрайт,2017.-400с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F#page/4>

3.Богомолов Н.В.Математика.Ззадачи с решениями. В 2ч.Ч.2[электронный курс]: [Текст]:учебное пособие для СПО /Н.В.Богомолов.-М.: Издательство Юрайт,2017.-285с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/0523A6DF-2657-4F49-8ACE-1B790E30D8C8#page/2>

**Дополнительная литература**

 1. Богомолов Н.В. Математика [Текст]: учебник для СПО / Н.В. Богомолов.- М.: Юрайт, 2015.- 396 с.

**3. Краткое содержание вопросов**

*3.1. Первообразная функция*

Функция называется **первообразной** для функции на промежутке , конечном или бесконечном, если функция [*дифференцируема*](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_3.php) в каждой точке этого промежутка и ее производная удовлетворяет следующему равенству:



Теорема: Если функция является первообразной для функции на некотором промежутке, то и функция , где - произвольная постоянная, также будет первообразной для функции на рассматриваемом промежутке.

Если функции и - две любые первообразные функции , то их разность равна некоторой постоянной, то есть



Каждая функция, которая является первообразной для функции , может быть представлена в виде .

*3.2. Неопределенный интеграл и его свойства*

Совокупность всех первообразных функции , определенных на заданном промежутке, называется **неопределенным интегралом от функции**и обозначается символом . То есть



Знак называется **интегралом**, - **подынтегральным выражением**, - **подынтегральной функцией**, а - **переменной интегрирования**.

Операция нахождения первообразной или неопределенного интеграла от функции называется **интегрированием функции**. Интегрирование представляет собой операцию, обратную [*дифференцированию*](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_3.php).

*Свойства неопределенного интеграла*.

1. Дифференциал от [неопределенного интеграла](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_9_1.php) равен подынтегральному выражению



2.Неопределенный интеграл от [дифференциала](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_3.php) некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная



3.Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла или вносить под знак интеграла



4.Неопределенный интеграл от суммы/разности двух и больше функций равен сумме/разности неопределенных интегралов от этих функций



*3.3. Таблица неопределенных интегралов. Методы интегрирования*



# Методы нахождения неопределенных интегралов

1. Метод непосредственного интегрирования

**Приведение к табличному виду** или **метод непосредственного интегрирования**. С помощью тождественных преобразований подынтегральной функции интеграл сводится к интегралу, к которому применимы основные правила интегрирования и возможно использование [таблицы основных интегралов](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_9_3.php).

2.Интегрирование заменой переменной

**Интегрирование заменой переменной или методом подстановки**. Пусть , где функция имеет непрерывную [производную](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_1.php), а между переменными и существует взаимно однозначное соответствие. Тогда справедливо равенство



3.Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называют интегрирование по формуле



*3.4. Определенный интеграл и его свойства*

Пусть функция  определена на промежутке . Для определённости и простоты считаем, что функция положительна  и [непрерывна](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на данном отрезке. **Поставим задачу найти площадь  криволинейной трапеции,** ограниченной графиком функции , прямыми  и осью . Разобьём отрезок  на частей следующими точками:



В результате получено  *частичных промежутков* с длинами  соответственно. Максимальная длина: 

Составим сумму, которая равна площади коричневой ступенчатой фигуры:


Данная сумма называется *интегральной суммой*, и её часто записывают в свёрнутом виде:


Если количество отрезков разбиения устремить к бесконечности , то интегральная сумма (площадь ступенчатой фигуры) будет стремиться к площади криволинейной трапеции: .

Таким образом, площадь криволинейной трапеции равна пределу интегральной суммы при диаметре разбиения, стремящемся к нулю:


*Конечный* предел интегральной суммы  при , не зависящий ни от способа дробления отрезка , ни от выбора точек , называется *определённым интегралом* функции  по промежутку  и обозначается символом .

При этом функция  называется *интегрируемой* в промежутке .

Итак, 

*Формула Ньютона-Лейбница* - основная формула интегрального исчисления:



Свойства определенного интеграла.

1. 

2. 

3. 

4. 

5. , где 

6.Если функция *y = f(x)* интегрируема на отрезке *[a; b]* и для любого значения аргумента , то .

7.Если функция *y = f(x)* непрерывна на отрезке *[a; b]*, то найдется такое число , что .

3.5. Геометрический смысл определенного интеграла. Приложения определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур

**Криволинейной трапецией** называется плоская фигура, ограниченная осью , [прямыми](http://www.mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html), и графиком [непрерывной](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на отрезке функции , которая [не меняет знак](http://www.mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html) на этом промежутке. Пусть данная фигура расположена не ниже оси абсцисс:



Тогда **площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу **.

Если криволинейная трапеция расположена «ниже» оси Ох (ƒ(х) < 0), то ее площадь может быть найдена по формуле



Площадь фигуры, ограниченной кривыми у =  = fι(x) и у = ƒг(х), прямыми х = а и х = b (при условии ƒ2(х) ≥ ƒ1(х)), можно найти по формуле:

**Тема №4 «Линейная алгебра»**

**1. Вопросы занятия:**

1.1. Определение матрицы

1.2. Действия над матрицами

1.3. Определитель матрицы. Свойства определителей и их вычисление

1.4. Решение систем линейных уравнений в матричной форме, по формулам Крамера

**2. Литература.**

**Основная литература**

1.Седых И.Ю.Математика [электронный курс]: [Текст]: учебник и практикум для СПО/И.Ю.Седых.-М.: Издательство Юрайт,2017.-443с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/CAB1548F-63AC-4C3F-8E82-C9B841E8F0A1#page/2>

2.Дорофеева В.А. Математика[электронный курс]: [Текст]: учебник для СПО/В.А.Дорофеева.-М.: Издательство Юрайт,2017.-400с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F#page/4>

3.Богомолов Н.В.Математика.Ззадачи с решениями. В 2ч.Ч.2[электронный курс]: [Текст]:учебное пособие для СПО /Н.В.Богомолов.-М.: Издательство Юрайт,2017.-285с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/0523A6DF-2657-4F49-8ACE-1B790E30D8C8#page/2>

**Дополнительная литература**

 1. Богомолов Н.В. Математика [Текст]: учебник для СПО / Н.В. Богомолов.- М.: Юрайт, 2015.- 396 с.

**3. Краткое содержание вопросов**

*3.1. Определение матрицы*

*Матрицей* размера называется прямоугольная таблица специального вида, состоящая из строк и столбцов, заполненная некоторыми элементами.

Количество строк и столбцов матрицы задают ее размеры.

Обозначение:

Элементы матрицы обозначаются , где - номер строки, в которой находится элемент, а - номер столбца.



- размерность матрицы

Матрица называется *квадратной*, если m=n

Если матрица имеет размерность , такая матрица называется *матрица -строка.*

Если матрица имеет размерность , такая матрица называется *матрица – столбец.*



Матрица размерностью , называется *матрицей n-ого порядка*.

Две матрицы одинаковой размерности *равны* друг другу, если равны их элементы, стоящие на одинаковых местах.

Элементы матрицы, у которых номер строки равен номеру столбца, образуют главную диагональ матрицы.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагонально*й.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*. Обозначается буквой Е.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулево*й. Обозначается буквой О.

В матричном исчислении матрицы О и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Матрица размера 1х1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей *транспонированно*й к данной. Обозначается АТ

 Транспонированная матрица обладает следующим свойством: (АТ)Т=А

*3.2. Действия над матрицами*

**Суммой матриц**и одного размера называется матрица такого же размера, получаемая из исходных путем сложения соответствующих элементов:



Складывать можно только матрицы одинакового размера.

*Свойства сложения и вычитания матриц:*

1. Ассоциативность 
2. , где -[нулевая матрица](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_2.php) соответствующего размера.
3. 
4. Коммутативность 

**Разностью матриц**и одного и того же размера называется матрица такого же размера, получаемая из исходных путем прибавления к матрице матрицы , умноженной на (-1).

На практике же от элементов матрицы попросту отнимают соответствующие [элементы матрицы](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_1.php)при условии, что заданные матрицы одного размера.

Вычитать можно только матрицы одинакового размера.

**Произведением матрицы**на ненулевое число**называется матрица того же порядка, полученная из исходной умножением на заданное [число](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_2_0.php) всех ее элементов:



При умножении числа на матрицу, или матрицы на число, получается одинаковый результат, то есть, .

Из определения следует, что общий множитель всех [элементов матрицы](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_1.php) можно выносить за знак матрицы.

Данная операция, вместе с операцией [сложения матриц](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_5.php), относится к линейным [операциям над матрицами](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_3.php).

*Произведением* матрицы на матрицу называется матрица такая, что элемент матрицы , стоящий в -ой строке и -ом столбце, т.е. элемент , равен сумме произведений элементов -ой строки матрицы на соответствующие элементы -ого столбца матрицы :

cij = ai1 · b1j + ai2 · b2j + ... + ain · bnj

Две матрицы можно перемножить между собой тогда и только тогда, когда количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы.

## *Свойства умножения матриц*

* (A · B) · C= A · (B · C) - произведение матриц ассоциативно;
* (z · A) · B= z · (A · B), гдеz - число;
* A · (B + C) = A · B + A · C - произведение матриц дистрибутивно;
* En · Anm = Anm · Em= Anm - умножение на [единичную матрицу](http://ru.onlinemschool.com/math/library/matrix/type#h6);
* A · B ≠ B · A - в общем случае произведение матриц не коммутативно.
* Произведением двух матриц есть матрица, у которой столько строк, сколько их у левого сомножителя, и столько столбцов, сколько их у правого сомножителя.

*3.3. Определитель матрицы. Свойства определителей и их вычисление*

Квадратной матрице -го порядка ставится в соответствие число , называемое **определителем матрицы** или **детерминантом*.***

## *Свойства определителя матрицы*

1. Определитель единичной матрицы равен единице:

det(E) = 1

2. Величина определителя не изменится, если все его строки заменить столбцами, причем каждую строку заменить столбцом с тем же номером, то есть

.

3. Перестановка двух столбцов или двух строк определителя равносильна умножению его на -1. Например,

.

4. Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.

5. Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя на любое число k равносильно умножению определителя на это число k. Например,

.

6. Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки равны нулю, то сам определитель равен нулю. Это свойство есть частный случае предыдущего (при k=0).

7. Если соответствующие элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

8. Если каждый элемент n-го столбца или n-й строки определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в n-м столбце или соответственно в n-й строке имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой - вторые; элементы, стоящие на остальных местах, у вех трех определителей одни и те же. Например,

.

9. Если к элементам некоторого столбца (или некоторой строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или другой строки), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится. Например,

.

10. Определитель



равен сумме произведений элементов какого-либо столбца (или строки) на их алгебраические дополнения.

## *Вычисление определителей*

Для матрицы первого порядка значение определителя равно значению элемента этой матрицы:

∆ = |a11| = a11

Для матрицы 2×2 значение определителя равно разности произведений элементов главной и побочной диагоналей:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ∆ =  |

|  |  |
| --- | --- |
| a11 | a12 |
| a21 | a22 |

 |  = a11·a22 - a12·a21 |

*Правило треугольника*

Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком "плюс"; аналогично, для второго определителя - соответствующие произведения берутся со знаком "минус", т.е.





#### Разложение определителя по строке или столбцу

Определитель матрицы равен сумме произведений элементов строки определителя на их [алгебраические дополнения](http://ru.onlinemschool.com/math/library/matrix/minors/#h2):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | n |  |
| det(A) =  | Σ | aij·Aij          - разложение по i-той строке |
|  | j = 1 |  |

Определитель матрицы равен сумме произведений элементов столбца определителя на их алгебраические дополнения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | n |  |
| det(A) =  | Σ | aij·Aij          - разложение по j-тому столбцу |
|  | i = 1 |  |

При разложении определителя матрицы обычно выбирают ту строку/столбец, в которой/ом максимальное количество нулевых элементов.

*Правило Саррюса*

Справа от определителя дописывают первые два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со знаком "плюс"; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком "минус":





*Приведение определителя к треугольному виду*

С помощью элементарных преобразований над строками или столбцами определитель приводится к треугольному виду и тогда его значение, согласно [свойствам определителя](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_9.php), равно произведению элементов стоящих на главной диагонали.

*3.4. Решение систем линейных уравнений в матричной форме, по формулам Крамера*

## *Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений*

**Минором**к элементу определителя -го порядка называется [определитель](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_9.php)-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием -той строки и -того столбца.

**Алгебраическим дополнением**к элементу определителя -го порядка называется число

**Невырожденной** называется [квадратная матрица](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_2.php), определитель которой не равен нулю. Квадратная матрица называется **вырожденной**, если ее определитель равен нулю.

Квадратная матрица называется **обратной** к невырожденной матрице , если , где - это единичная матрица соответствующего порядка.

Обратная матрица существует только для **квадратных** матриц с **не равными нулю** [определителями](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_9.php).

 *Свойства обратной матрицы*

1.  

2.    

3.     

4.    

*Алгоритм нахождения обратной матрицы* с использованием равенства 

1. Вычисляем определитель матрицы *А* и убеждаемся, что он отличен от нуля (в противном случае матрица *А* необратима).
2. Строим - матрицу из алгебраических дополнений элементов .
3. Транспонируем матрицу , тем самым получаем .
4. Умножаем каждый элемент матрицы на число . Этой операцией завершается нахождение обратной матрицы .
5. Проводим проверку результата, вычисляя произведения и . Если , то обратная матрица найдена верно, в противном случае где-то была допущена ошибка.

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид:, которые в матричной форме записываются как

,

 где:

 основная матрица системы:



Матрица-столбец неизвестных:



Матрица свободных членов:

.

Пусть для матрицы *А* порядка *n* на *n* существует обратная матрица . Умножим обе части матричного уравнения слева на (порядки матриц *A ⋅ X* и *В* позволяют произвести такую операцию. Имеем . Так как для операции умножения матриц подходящих порядков характерно свойство ассоциативности, то последнее равенство можно переписать как , а по определению обратной матрицы (*E* – единичная матрица порядка *n* на *n*), поэтому


Таким образом, решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом определяется по формуле.

СИСТЕМУ *n* ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С *n* НЕИЗВЕСТНЫМИ МОЖНО РЕШАТЬ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ОСНОВНОЙ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ ОТЛИЧЕН ОТ НУЛЯ.

*Теорема Крамера.* Пусть - определитель матрицы системы А, а - определитель матрицы, получаемой из матрицы А заменой -го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если , то система имеет единственное решение, определяемое по формулам: .

Эти формулы получили название *формул Крамера*.

При =0 система или не имеет решения (если один из определителей ), или имеет бесчисленное множество решений при всех =0.

 Если система однородна, т.е. все свободные члены равны нулю, то она всегда имеет *нулевое* (тривиальное) решение при ;

Если =0, то однородная система имеет *ненулевые* решения.

*Элементарные преобразования* системы линейных уравнений, не нарушающие равносильность системы:

1) Вычеркивание уравнения системы, у которой все коэффициенты при неизвестных и свободный член равны нулю. Такое уравнение называется тривиальным.

2) Умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на отличное от нуля число.

3) Замена -го уравнения системы уравнением, которое получается путем почленного сложения -го и -го уравнений системы.

**Тема №5 «Элементы теории вероятностей»**

**1. Вопросы занятия:**

1.1. Формулы комбинаторики

1.2. Вероятность события

1.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1.4. Формула полной вероятности

1.5. Повторение испытаний. Формула Бернулли

1.6. Дискретная случайная величина и закон ее распределения

1.7. Числовые характеристики дискретной случайной величины

**2. Литература.**

**Основная литература**

1.Седых И.Ю.Математика [электронный курс]: [Текст]: учебник и практикум для СПО/И.Ю.Седых.-М.: Издательство Юрайт,2017.-443с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/CAB1548F-63AC-4C3F-8E82-C9B841E8F0A1#page/2>

2.Дорофеева В.А. Математика[электронный курс]: [Текст]: учебник для СПО/В.А.Дорофеева.-М.: Издательство Юрайт,2017.-400с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F#page/4>

3.Богомолов Н.В.Математика.Ззадачи с решениями. В 2ч.Ч.2[электронный курс]: [Текст]:учебное пособие для СПО /Н.В.Богомолов.-М.: Издательство Юрайт,2017.-285с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/0523A6DF-2657-4F49-8ACE-1B790E30D8C8#page/2>

**Дополнительная литература**

 1. Богомолов Н.В. Математика [Текст]: учебник для СПО / Н.В. Богомолов.- М.: Юрайт, 2015.- 396 с.

**3. Краткое содержание вопросов**

3.1. Формулы комбинаторики

*Размещением* из *n* элементов по *m*в комбинаторике называется любой упорядоченный набор из *m* различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в *n* элементов.

Число размещений в комбинаторике обозначается Anm и вычисляется по формуле:


**Сочетанием** из *n* элементов по *m* в комбинаторике называется любой **неупорядоченный набор** из **m** различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в**n** элементов.

Число сочетаний обозначается Cnm и вычисляется по формуле:


*Перестановкой* из *n* элементов называется любой упорядоченный набор этих элементов.

Число различных перестановок из n элементов обозначается Pn и вычисляется по формуле Pn=n!.

3.2. Вероятность события

Несколько событий образуют *полную группу (пространство исходов)*, если в результате испытания появиться хотя бы одно из них.

*Вероятностью P(A)* события *А* называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Вероятность P(A) события *А* определяется по формуле:

,

где *m*– число элементарных исходов, благоприятствующих *A;n* – число всех возможных элементарных исходов испытания.

*3.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей*

*Теорема сложения вероятностей*

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:

Р (А + В) = Р (А) + Р (В).

В случае, когда события А и В *совместны*, вероятность их суммы выражается формулой:

Р (А +В) = Р (А) + Р (В) – Р (АВ),

где АВ – произведение событий А и В.

Два события называются *зависимыми*, если вероятность одного из них зависит от наступления или не наступления другого. В случае зависимых событий вводится понятие условной вероятности события.

*Условной вероятностью* Р(А/В) события А называется вероятность события А, вычисленная при условии, что событие В произошло. Аналогично через Р(В/А) обозначается условная вероятность события В при условии, что событие А наступило.

*Произведением* двух событий *А и В* называется событие С, состоящее в совместном появлении события А и события В.

# *Теорема  умножения вероятностей*

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:

Р (АВ) = Р(А) · Р(В/А), или Р (АВ) = Р(В) · Р(А/В).

*Следствие*. Вероятность совместного наступления двух независимых  событий А и В равна произведению вероятностей этих событий:

Р (АВ) = Р(А) · Р(В).

3.4. Формула полной вероятности

Если событие *А* может произойти только при выполнении одного из событий

, которые образуют *полную группу несовместных событий*, то вероятность события *А* вычисляется по формуле

.

Формула Байеса



*3.5. Повторение испытаний. Формула Бернулли*

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми относительно события А.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события одинакова и равна p() , событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), равна

 - Формула Бернулли

Если:

Событие А появится менее k раз



Событие А появится более k раз



    Событие А появится не менее k раз

 Событие А появится не более k раз

, где каждое из слагаемых находится по формуле Бернулли.

*3.6. Дискретная случайная величина и закон ее распределения*

Переменная величина называется *случайной*, если в результате опыта она может принимать действительные значения с определёнными вероятностями.

Дискретная случайная величина – у нее значения меняются скачкообразно, а не плавно, то есть могут принять лишь некоторые заранее вычисленные значения.

*Закон распределения* дискретной случайной величины – это перечень всех возможных значений дискретной случайной величины и соответствующих вероятностей.

Закон распределения можно задать в виде таблицы, формулы или графически. При табличном задании закона распределения в первой строке таблицы записываются возможные значения случайной величины, а во второй – соответствующие значениям вероятности:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X |  |  | … |  |
| *p* |  |  | … |  |

Сумма всех вероятностей *Σpi = 1*.

3.7. Числовые характеристики дискретной случайной величины

*Математическое ожидание* дискретной случайной величины есть сумма произведений всех её возможных значений на их вероятности:
M(X) = x1p1 + x2p2 + ... + xnpn

*Свойства математического ожидания*.
1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой величине:
М(С) = С
2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:
М(СХ) = С·М(Х)

3) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:
М(Х1 + Х2 + …+ Хn) = М(Х1) + М(Х2) + ... + М(Хn)
4) Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:
М(Х1 · Х2 · ... · Хn) = М(Х1) · М(Х2) · ... · М(Хn)

*Дисперсия* дискретной случайной величины есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:
D(X) = (x1 - M(X))2p1 + (x2 - M(X))2p2 + ... + (xn- M(X))2pn = x21p1 + x22p2 + ... + x2npn - [M(X)]2

*Свойства дисперсии*.
1) Дисперсия постоянной величины равна нулю: D(С) = 0
2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: D(СХ) = С2 · D(Х)
3) Дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых: D(Х1 ± Х2 ± ... ± Хn) = D(Х1) + D(Х2) + ... + D(Хn)

*Среднее квадратическое отклонение* дискретной случайной величины, оно же стандартное отклонение или среднее квадратичное отклонение есть корень квадратный из дисперсии:
σ(X) = √D(X)