**Уважаемые студенты!**

**По дисциплине ЕН.01 Математика каждый студент заочник должен изучить теоретические вопросы по темам:**

**№1 « Теория пределов и непрерывность»**

**№2 «Основы дифференциального исчисления»**

**№3 «Основы интегрального исчисления»**

**№4 «Линейная алгебра»**

**№5 «Элементы теории вероятностей»**

**Вам в помощь некоторый теоретический материал изложен ниже, после практических занятий. Можете воспользоваться любым другим ресурсом**

**Кроме того необходимо выполнить практическую часть. Студенты успешно выполнившие весь объем практической части автоматически получают зачет с оценкой по дисциплине**

**Практическое занятие №1**

**«Теория пределов и непрерывность функций»**

Каждому студенту найти по 4 любых предела (всего 8) из заданий №1и2.Скриншоты переслать на электронный адрес *vivan62@list.ru*

Задание №1. Найти пределы функций

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |

Задание №2.Найти пределы функций

.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**Практическое занятие №2.**

**«Вычисление производной функции Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.»**

Каждому студенту выполнить задания №1и2.Скриншоты переслать на электронный адрес [*vivan62@list.ru*](mailto:vivan62@list.ru)

*Задание 1*.Найти производные следующих функций (любые 4 из первой десятки и любые 4 из второй десятки (всего 8))

|  |  |
| --- | --- |
| **1.** |  |
| **2.** |  |
| **3.** |  |
| **4.** |  |
| **5.** |  |
| **6.** |  |
| **7.** |  |
| **8.** | . |
| **9.** |  |
| **10.** |  |
| **11.** | y=sinxcosx |
| **12.** | y=ex cosx |
| **13.** | y=x3 tgx |
| **14.** | y=x5 lnx |
| **15.** | y=2x sinx |
| **16.** | y=tg5x |
| **17.** | y=sin3x |
| **18.** | y =(2x+5)10 |
| **19.** | y=e3x |
| **20.** | y=ln5x |

*Задание.2* Найдите наименьшее и наибольшее значения любых 3 функций , размещенных ниже разобранного примера

**Пример** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  на промежутке .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №  шага | План нахождения  и на | Применение плана |
| 1 | Находим производную функции |  |
| 2 | Находим критические точки функции | , ,  или ,  - критические точки функции |
| 3 | Выбираем критические точки, лежащие внутри |  |
| 4 | Находим значения функции в критических точках (внутри данного отрезка) и на концах отрезка |  |
| 5 | Из найденных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее | , |

1) , ;

2) , ;

3) , ;

4) , ;

5) , ;

**Практическое занятие №3**

**«Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённых интегралов.»**

Каждому студенту выполнить задания №1и2.Скриншоты переслать на электронный адрес [*vivan62@list.ru*](mailto:vivan62@list.ru)

1.Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

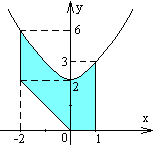
(любые 3 )

1. ;
2. ;
3. ;
4. 
5. 
6. ;
7. 
8. ;
9. .

2.Выполнить один (любой) вариант заданий.

Вариант 1.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: .
2. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, вычисляется



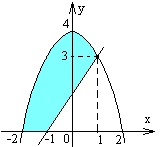
а) ;

б) ;

в) .

Вариант 2.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: .
2. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, вычисляется



а) ;

б) ;

в) .

Вариант 3.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: .
2. Площадь фигуры, ограниченной линиями , равна:

а) ; б) 4; в) .

Вариант 4.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: .
2. Площадь фигуры, ограниченной линиями , равна:

а) ; б) ; в) .

**Практическое занятие №4.**

**«**Операции над матрицами. Вычисление определителей**.»**

Каждому студенту выполнить задания №1,2 и 3.Скриншоты переслать на электронный адрес [*vivan62@list.ru*](mailto:vivan62@list.ru)

Задание №1. Вычислить 5А - 2В.(любой 1 вариант)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вар. | А | В | Вар. | А | В |
| 1 |  |  | 6 |  |  |
| 2 |  |  | 7 |  |  |
| 3 |  |  | 8 |  |  |
| 4 |  |  | 9 |  |  |
| 5 |  |  | 10 |  |  |

Задание 2. Умножить матрицы(любой один вариант, в каждом варианте два произведения)

вариант

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | ; | ; |
| 2 | ; | ; |
| 3 | ; | в) . |
| 4 | ; | ; |
| 5 | ; | ; |
| 6 | ; | ; |
| 7 | ; | ; |
| 8 | ; | ; |
| 9 | ; | ; |
| 10 | ; | ; |

Задание № 3. Вычислить определители(любой один вариант, в каждом варианте два определителя)

:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| вар |  |  | вар |  |  |
| **1.** | ; | ; | **6.** | ; | ; |
| **2.** | ; | ; | **7.** | ; | ; |
| **3.** | ; | ; | **8.** | ; | ; |
| **4.** | ; | ; | **9.** | ; | ; |
| **5.** | ; | ; | **10** | ; | ; |

**Практическое занятие №5.**

**« Элементы теории вероятностей и математической статистики»**

Каждому студенту выполнить любой один вариант. Скриншоты переслать на электронный адрес [*vivan62@list.ru*](mailto:vivan62@list.ru)

**Вариант 1.**

1. Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию; в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины  по закону ее распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке – вероятности возможных значений). Составить функцию распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
|  | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |

**Вариант 2.**

1. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны всевозможные значения, во второй строке- вероятности возможных значений). Составить функцию распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 1,4 | 2,2 | 3,5 | 4,1 | 5,2 |
| pi | 0,3 | 0,2 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |

**Вариант 3.**

1. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны всевозможные значения, во второй строке- вероятности возможных значений). Составить функцию распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 120 | 135 | 150 | 180 | 185 |
| pi | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

**Вариант 4.**

1. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны всевозможные значения, во второй строке- вероятности возможных значений). Составить функцию распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 10 | 13 | 17 | 19 | 22 |
| pi | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,1 |

**Вариант 5.**

1. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону её распределения, заданному рядом распределения (в первой строке таблицы указаны всевозможные значения, во второй строке- вероятности возможных значений). Составить функцию распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 12 | 14 | 18 | 24 | 27 |
| pi | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |

**Тема№1 « Теория пределов и непрерывность»**

**1. Вопросы занятия:**

1.1. Числовая последовательность

1.2. Предел последовательности

1.3. Функция. Предел функции

1.4. Теоремы о пределах функций

1.5. Непрерывность функций

1.6. Замечательные пределы

**2. Литература.**

**Основная литература**

1.Седых И.Ю.Математика [электронный курс]: [Текст]: учебник и практикум для СПО/И.Ю.Седых.-М.: Издательство Юрайт,2017.-443с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/CAB1548F-63AC-4C3F-8E82-C9B841E8F0A1#page/2>

2.Дорофеева В.А. Математика[электронный курс]: [Текст]: учебник для СПО/В.А.Дорофеева.-М.: Издательство Юрайт,2017.-400с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F#page/4>

3.Богомолов Н.В.Математика.Ззадачи с решениями. В 2ч.Ч.2[электронный курс]: [Текст]:учебное пособие для СПО /Н.В.Богомолов.-М.: Издательство Юрайт,2017.-285с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/0523A6DF-2657-4F49-8ACE-1B790E30D8C8#page/2>

**Дополнительная литература**

1. Богомолов Н.В. Математика [Текст]: учебник для СПО / Н.В. Богомолов.- М.: Юрайт, 2015.- 396 с.

**3. Краткое содержание вопросов**

*3.1. Числовая последовательность*

Множество чиселhttp://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_001.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_002.gifкоторое определено для каждого натурального числа с одинаковым правилом называют *числовой последовательностью*и обозначают http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_003.gif, где http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_004.gif– члены числовой последовательности, http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_005.gif– *общий член последовательности.*

*Возрастающая последовательность*– каждый ее член больше предыдущего

http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_014.gif

*Неубывающая последовательность* – каждый следующий член не меньший от предыдущегоhttp://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_015.gif

*Невозрастающая последовательность* – каждый старший член не больше предыдущегоhttp://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_017.gif

*Ограниченная последовательность* имеет место тогда, когда найдутся такие действительные числа http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_018.gifи http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_019.gif, что для всех натуральных чисел http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_020.gifвыполняется неравенствоhttp://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_021.gif

*3.2. Предел последовательности.*

Число http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_006.gifназывается *пределом числовой последовательности*http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_007.gif, если для любого сколь угодно малого положительного числа http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_008.gifнайдется такое натуральное число http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_009.gif, что при всех http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_010.gifвыполняется неравенствоhttp://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_011.gif

Последовательность http://yukhym.com/images/stories/Limit/Lim1_022.gifназывается *неограниченной*, если она постоянно или растет или убывает.

Последовательность, имеющая предел называется *сходящейся.* Противоположная к ней последовательность - соответственно *расходящейся*.

*3.3 Функция. Предел функции.*

Определение предела по Коши. Число A называется пределом функции f (x) в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, и для каждого ε > 0 существует δ > 0 такое, что для всех x, удовлетворяющих условию |x – a| < δ, x ≠ a, выполняется неравенство |f (x) – A| < ε.

Определение предела по Гейне. Число A называется пределом функции f (x) в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, и для любой последовательности http://www.mathematics.ru/courses/function/content/javagifs/63230175642391-1.gifтакой, что http://www.mathematics.ru/courses/function/content/javagifs/63230175642401-2.gifсходящейся к числу a, соответствующая последовательность значений функции http://www.mathematics.ru/courses/function/content/javagifs/63230175642431-3.gifсходится к числу A.

*3.4. Теоремы о пределах функций*

1.  Предел константы равен самой этой константе:

http://oldskola1.narod.ru/Kochetkov2/175.gif***с = с***.

2.  Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

http://oldskola1.narod.ru/Kochetkov2/175.gif[ *k* •  *f*(*х*)] = *k •*http://oldskola1.narod.ru/Kochetkov2/175.gif  *f*(*х*).

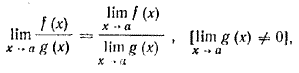
3*.*Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) пределов этих функций:

http://oldskola1.narod.ru/Kochetkov2/175.gif[ *f*(*х*) ± *g* (*х*)] = http://oldskola1.narod.ru/Kochetkov2/175.gif  *f*(*х*) ± http://oldskola1.narod.ru/Kochetkov2/175.gif *g* (*x*).

4.  Предел произведения функций равен произведению пределов этих функций:

http://oldskola1.narod.ru/Kochetkov2/175.gif[ *f*(*х*) • *g* (*х*)] = http://oldskola1.narod.ru/Kochetkov2/175.gif  *f*(*х*) • http://oldskola1.narod.ru/Kochetkov2/175.gif *g* (*x*).

5.  Предел отношения двух функций равен отношению пределов этих функций, если только предел делителя не равен нулю:



*3.5. Непрерывность функций*

Если функция *у = f* (*х*) удовлетворяет условиюhttp://oldskola1.narod.ru/Kochetkov2/175.gif  *f*(*х*)  = *f*(*a*),то она называется *непрерывной* в точке *х = а*.

Если же   указанное   условие не выполняется, то функция  *f*(*х*) называется *разрывной* в точке *х = а*.'

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке, в которой они определены.

Функция *у* = *f*(*х*) называется *непрерывной в интервале* (*а, b*), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

**Тема №2 «Основы дифференциального исчисления»**

**1. Вопросы занятия:**

1.1. Производная, ее геометрический и механический смысл

1.2. Правила и формулы дифференцирования

1.3. Исследование функций методами дифференциального исчисления

1.4. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям

**2. Литература.**

**Основная литература**

1.Седых И.Ю.Математика [электронный курс]: [Текст]: учебник и практикум для СПО/И.Ю.Седых.-М.: Издательство Юрайт,2017.-443с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/CAB1548F-63AC-4C3F-8E82-C9B841E8F0A1#page/2>

2.Дорофеева В.А. Математика[электронный курс]: [Текст]: учебник для СПО/В.А.Дорофеева.-М.: Издательство Юрайт,2017.-400с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F#page/4>

3.Богомолов Н.В.Математика.Ззадачи с решениями. В 2ч.Ч.2[электронный курс]: [Текст]:учебное пособие для СПО /Н.В.Богомолов.-М.: Издательство Юрайт,2017.-285с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/0523A6DF-2657-4F49-8ACE-1B790E30D8C8#page/2>

**Дополнительная литература**

1. Богомолов Н.В. Математика [Текст]: учебник для СПО / Н.В. Богомолов.- М.: Юрайт, 2015.- 396 с.

**3. Краткое содержание вопросов**

*3.1. Производная, ее геометрический и механический смысл.*

**Производной**http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1600.pngот функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.pngв точке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1509.pngназывается [предел](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_9.php) отношения приращения функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1519.pngк приращению аргумента http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1515.png  приhttp://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1602.png, если он существует, то есть:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1603.png

или

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1604.png

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

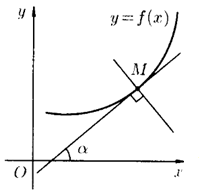
Функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.pngимеет производную на интервалеhttp://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1580.pngили называется *дифференцируемой* в этом интервале, если производная http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1585.pngсуществует в каждой точке этого интервала.

Если функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.pngимеет конечную производную в точке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1509.png, то она непрерывна в этой точке.

*Геометрический смысл производной*

Производная функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.png, вычисленная при заданном значении http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1339.png, равна тангенсу угла, образованного положительным направлением оси http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1695.pngи положительным направлением касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1339.png:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1696.png



*Механический смысл производной*

Пусть задан путь http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1685.pngдвижения материальной точки. Скорость данной материальной точки в момент времени http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1686.pngесть производная от пути http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1687.pngпо времени http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1686.png:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1688.png

*3.2. Правила и формулы дифференцирования*

Правила дифференцирования:

*1) (с) ' = 0, (cu) ' = cu';*

*2) (u+v)' = u'+v';*

*3) ( uv)' = u'v+v'u;*

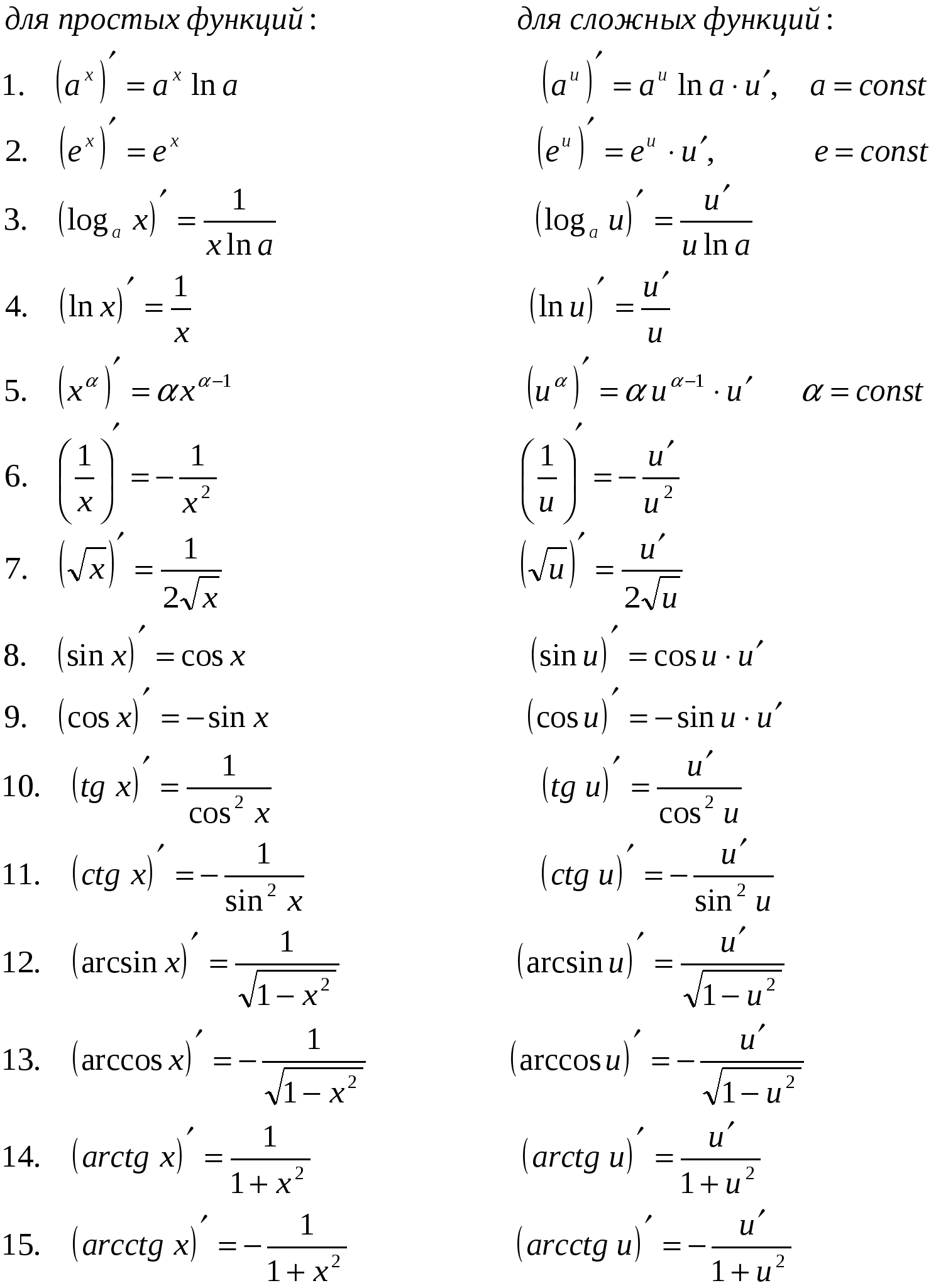
*4) (u/v)' = (u'v-v'u)/v 2;*

5) если y = f(u), u = ϕ(x), т.е. y = f(ϕ(x)) - *сложная функция,* или *суперпозиция*, составленная из дифференцируемых функций ϕ и f, то http://e-science.ru/sites/default/files/chem_terms/yb/image010-1.gif, или

http://e-science.ru/sites/default/files/chem_terms/v9/image012-1.gif;

6) если для функции y = f(x) существует обратная дифференцируемая функция

x = g(y), тоhttp://e-science.ru/sites/default/files/chem_terms/h9/image016-1.gif.

*Формулы дифференцирования  
*

*3.3. Исследование функций методами дифференциального исчисления*

*Признаки возрастания/убывания монотонной функции*

Если производная функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2061.pngна некотором промежутке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_963.png, то функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.pngвозрастает на этом промежутке; если же http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2062.pngна промежутке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_963.png, то функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.pngубывает на этом промежутке.

**Теорема**

*Необходимое условие экстремума*

Если функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.pngимеет экстремум в точке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1509.png, то ее производная http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2179.pngлибо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых производная равна нулю: http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2071.png, называются *стационарными точками функции.*

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума для непрерывной функции, называются *критическими точками* этой функции. То есть *критические точки* - это либо стационарные точки (решения уравнения http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2071.png), либо это точки, в которых производная http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1585.pngне существует.

*Достаточное условие экстремума*

Пусть для функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.pngвыполнены следующие условия:

1. функция непрерывна в окрестности точки http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1509.png;
2. http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2072.pngили http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2179.pngне существует;
3. производная http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1585.pngпри переходе через точку http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1509.pngменяет свой знак.

Тогда в точке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2073.pngфункция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.pngимеет экстремум, причем это минимум, если при переходе через точку http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1509.pngпроизводная меняет свой знак с минуса на плюс; максимум, если при переходе через точку http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1509.pngпроизводная меняет свой знак с плюса на минус.

Если производная http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1585.pngпри переходе через точку http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1509.pngне меняет знак, то экстремума в точке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2073.pngнет.

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение непрерывной на отрезке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1974.pngфункции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1252.png, надо найти все максимумы (минимумы) функции на интервале http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1580.pngи значения http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1252.pngна концах отрезка http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1974.png, то есть http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2097.pngи http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2098.png, и выбрать среди них наибольшее (наименьшее). Вместо исследования на максимум (минимум) можно ограничиться нахождением значений функции в критических точках.

**Теорема**

*Выпуклость и вогнутость графика функции*

Пусть функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.pngопределена на интервале http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1580.pngи имеет непрерывную, не равную нулю в точке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2180.pngвторую производную. Тогда, если http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2106.pngвсюду на интервале http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1580.png, то функция имеет *вогнутость на этом интервале*, если http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2107.png, то функция имеет *выпуклость*.

**Определение**

*Точкой перегиба* графика функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1251.pngназывается точка http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_2108.png, разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости.

3.4. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям

**Дифференциалом функции** называется линейная относительно http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1515.pngчасть приращения функции. Она обозначается как http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1620.pngили http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1621.png. Таким образом:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1622.png

Замечание

Дифференциал функции составляет основную часть ее приращения.

Наряду с понятием дифференциала функции вводится понятие дифференциала аргумента.

**Дифференциал аргумента** есть [*приращение аргумента*](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_1.php)*:*

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1623.png

Замечание

Формулу для дифференциала функции можно записать в виде:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1624.png

Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции в точке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1509.pngравен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в этой точке, соответствующему приращению аргумента http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1515.png.

# Применение дифференциала в приближенных вычислениях

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1667.png

Для приближенного вычисления значения функции применяется следующая формула:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/diff/formules_1668.png

**Тема №3 «Основы интегрального исчисления»**

**1. Вопросы занятия:**

1.1. Первообразная функция

1.2. Неопределенный интеграл и его свойства

1.3. Таблица неопределенных интегралов. Методы интегрирования

1.4. Определенный интеграл и его свойства

1.5. Геометрический смысл определенного интеграла. Приложения определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур

**2. Литература.**

**Основная литература**

1.Седых И.Ю.Математика [электронный курс]: [Текст]: учебник и практикум для СПО/И.Ю.Седых.-М.: Издательство Юрайт,2017.-443с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/CAB1548F-63AC-4C3F-8E82-C9B841E8F0A1#page/2>

2.Дорофеева В.А. Математика[электронный курс]: [Текст]: учебник для СПО/В.А.Дорофеева.-М.: Издательство Юрайт,2017.-400с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F#page/4>

3.Богомолов Н.В.Математика.Ззадачи с решениями. В 2ч.Ч.2[электронный курс]: [Текст]:учебное пособие для СПО /Н.В.Богомолов.-М.: Издательство Юрайт,2017.-285с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/0523A6DF-2657-4F49-8ACE-1B790E30D8C8#page/2>

**Дополнительная литература**

1. Богомолов Н.В. Математика [Текст]: учебник для СПО / Н.В. Богомолов.- М.: Юрайт, 2015.- 396 с.

**3. Краткое содержание вопросов**

*3.1. Первообразная функция*

Функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2182.pngназывается **первообразной** для функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2187.pngна промежутке http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2188.png, конечном или бесконечном, если функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2182.png[*дифференцируема*](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_3.php) в каждой точке этого промежутка и ее производная удовлетворяет следующему равенству:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2183.png

Теорема: Если функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2182.pngявляется первообразной для функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2187.pngна некотором промежутке, то и функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2194.png, где http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2195.png- произвольная постоянная, также будет первообразной для функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2185.pngна рассматриваемом промежутке.

Если функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2182.pngи http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2199.png- две любые первообразные функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2187.png, то их разность равна некоторой постоянной, то есть

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2200.png

Каждая функция, которая является первообразной для функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2185.png, может быть представлена в виде http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2201.png.

*3.2. Неопределенный интеграл и его свойства*

Совокупность всех первообразных функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2187.png, определенных на заданном промежутке, называется **неопределенным интегралом от функции**http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2187.pngи обозначается символом http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2202.png. То есть

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2203.png

Знак http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2204.pngназывается **интегралом**, http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2186.png- **подынтегральным выражением**, http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2185.png- **подынтегральной функцией**, а http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2205.png- **переменной интегрирования**.

Операция нахождения первообразной или неопределенного интеграла от функции http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2185.pngназывается **интегрированием функции**http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2185.png. Интегрирование представляет собой операцию, обратную [*дифференцированию*](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_3.php).

*Свойства неопределенного интеграла*.

1. Дифференциал от [неопределенного интеграла](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_9_1.php) равен подынтегральному выражению

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2207.png

2.Неопределенный интеграл от [дифференциала](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_3.php) некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2211.png

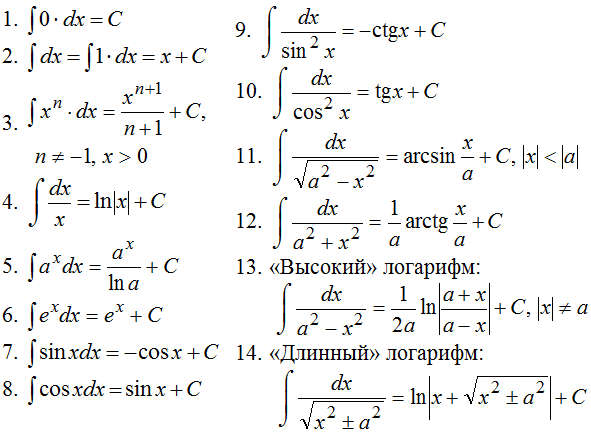
3.Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла или вносить под знак интеграла

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2213.png

4.Неопределенный интеграл от суммы/разности двух и больше функций равен сумме/разности неопределенных интегралов от этих функций

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2215.png

*3.3. Таблица неопределенных интегралов. Методы интегрирования*



# Методы нахождения неопределенных интегралов

1. Метод непосредственного интегрирования

**Приведение к табличному виду** или **метод непосредственного интегрирования**. С помощью тождественных преобразований подынтегральной функции интеграл сводится к интегралу, к которому применимы основные правила интегрирования и возможно использование [таблицы основных интегралов](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_9_3.php).

2.Интегрирование заменой переменной

**Интегрирование заменой переменной или методом подстановки**. Пусть http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2236.png, где функция http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2237.pngимеет непрерывную [производную](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_1.php)http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2238.png, а между переменными http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2205.pngи http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2239.pngсуществует взаимно однозначное соответствие. Тогда справедливо равенство

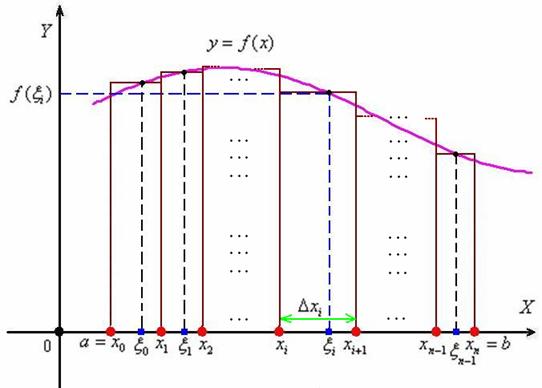
http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2240.png

3.Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называют интегрирование по формуле

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/integral/formules_2244.png

*3.4. Определенный интеграл и его свойства*

Пусть функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image098.gif определена на промежутке http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100.gif. Для определённости и простоты считаем, что функция положительна http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image102.gif и [непрерывна](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на данном отрезке. **Поставим задачу найти площадь http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image104.gif криволинейной трапеции,** ограниченной графиком функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image098_0000.gif, прямыми http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image107.gif и осью http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image109.gif. Разобьём отрезок http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100_0000.gif наhttp://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image112.gif частей следующими точками:   
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image114.gif   


В результате получено http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image112_0000.gif *частичных промежутков*http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image119.gif с длинами http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image121.gif соответственно. Максимальная длина: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image123.gif

Составим сумму, которая равна площади коричневой ступенчатой фигуры:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image143.gif

Данная сумма называется *интегральной суммой*, и её часто записывают в свёрнутом виде:   
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image145.gif

Если количество отрезков разбиения устремить к бесконечности http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image170.gif, то интегральная сумма (площадь ступенчатой фигуры) будет стремиться к площади криволинейной трапеции: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image172.gif.

Таким образом, площадь криволинейной трапеции равна пределу интегральной суммы при диаметре разбиения, стремящемся к нулю:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image174.gif

*Конечный* предел интегральной суммы http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image194.gif при http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image179_0000.gif, не зависящий ни от способа дробления отрезка http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100_0002.gif, ни от выбора точек http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image137_0000.gif, называется *определённым интегралом* функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0012.gif по промежутку http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100_0003.gif и обозначается символом http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image198.gif.

При этом функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0013.gif называется *интегрируемой* в промежутке http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100_0004.gif.

Итак, http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image192_0000.gif

*Формула Ньютона-Лейбница* - основная формула интегрального исчисления:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_37.gif

Свойства определенного интеграла.

1. формула

2. формула

3. формула

4. формула

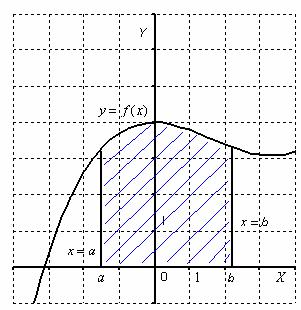
5. формула, где формула

6.Если функция *y = f(x)* интегрируема на отрезке *[a; b]* и формуладля любого значения аргумента формула, то формула.

7.Если функция *y = f(x)* непрерывна на отрезке *[a; b]*, то найдется такое число формула, что формула.

3.5. Геометрический смысл определенного интеграла. Приложения определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур

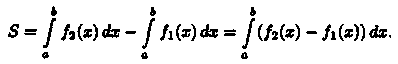
**Криволинейной трапецией** называется плоская фигура, ограниченная осью http://www.mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image004.gif, [прямыми](http://www.mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html)http://www.mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image006.gif, http://www.mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image008.gifи графиком [непрерывной](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на отрезке http://www.mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image071.gifфункции http://www.mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image002.gif, которая [не меняет знак](http://www.mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html) на этом промежутке. Пусть данная фигура расположена не ниже оси абсцисс:



Тогда **площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу http://www.mathprofi.ru/f/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala_clip_image012.gif**.

Если криволинейная трапеция расположена «ниже» оси Ох (ƒ(х) < 0), то ее площадь может быть найдена по формуле

http://www.znannya.org/images/math/lect/lect1-31-pic/Image692.gif

Площадь фигуры, ограниченной кривыми у =  = fι(x) и у = ƒг(х), прямыми х = а и х = b (при условии ƒ2(х) ≥ ƒ1(х)), можно найти по формуле:

**Тема №4 «Линейная алгебра»**

**1. Вопросы занятия:**

1.1. Определение матрицы

1.2. Действия над матрицами

1.3. Определитель матрицы. Свойства определителей и их вычисление

1.4. Решение систем линейных уравнений в матричной форме, по формулам Крамера

**2. Литература.**

**Основная литература**

1.Седых И.Ю.Математика [электронный курс]: [Текст]: учебник и практикум для СПО/И.Ю.Седых.-М.: Издательство Юрайт,2017.-443с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/CAB1548F-63AC-4C3F-8E82-C9B841E8F0A1#page/2>

2.Дорофеева В.А. Математика[электронный курс]: [Текст]: учебник для СПО/В.А.Дорофеева.-М.: Издательство Юрайт,2017.-400с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F#page/4>

3.Богомолов Н.В.Математика.Ззадачи с решениями. В 2ч.Ч.2[электронный курс]: [Текст]:учебное пособие для СПО /Н.В.Богомолов.-М.: Издательство Юрайт,2017.-285с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/0523A6DF-2657-4F49-8ACE-1B790E30D8C8#page/2>

**Дополнительная литература**

1. Богомолов Н.В. Математика [Текст]: учебник для СПО / Н.В. Богомолов.- М.: Юрайт, 2015.- 396 с.

**3. Краткое содержание вопросов**

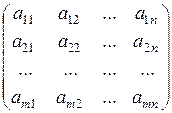
*3.1. Определение матрицы*

*Матрицей* размера http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_625.pngназывается прямоугольная таблица специального вида, состоящая из http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_127.pngстрок и http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_128.pngстолбцов, заполненная некоторыми элементами.

Количество строк и столбцов матрицы задают ее размеры.

Обозначение:http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_698.png

Элементы матрицы http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_422.pngобозначаются http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_638.png, где http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_639.png- номер строки, в которой находится элемент, а http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_640.png- номер столбца.

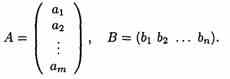


http://ok-t.ru/studopedia/baza9/1973126245561.files/image968.gif- размерность матрицы

Матрица называется *квадратной*, если m=n

Если матрица имеет размерность http://ok-t.ru/studopedia/baza9/1973126245561.files/image970.gif, такая матрица называется *матрица -строка.*

Если матрица имеет размерность http://ok-t.ru/studopedia/baza9/1973126245561.files/image972.gif, такая матрица называется *матрица – столбец.*



Матрица размерностью http://ok-t.ru/studopedia/baza9/1973126245561.files/image968.gif, называется *матрицей n-ого порядка*.

Две матрицы одинаковой размерности *равны* друг другу, если равны их элементы, стоящие на одинаковых местах.

Элементы матрицы, у которых номер строки равен номеру столбца, образуют главную диагональ матрицы.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагонально*й.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*. Обозначается буквой Е.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулево*й. Обозначается буквой О.

В матричном исчислении матрицы О и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Матрица размера 1х1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей *транспонированно*й к данной. Обозначается АТ

 Транспонированная матрица обладает следующим свойством: (АТ)Т=А

*3.2. Действия над матрицами*

**Суммой матриц**http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_422.pngи http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_423.pngодного размера называется матрица http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_684.pngтакого же размера, получаемая из исходных путем сложения соответствующих элементов:

Сложение матриц

Складывать можно только матрицы одинакового размера.

*Свойства сложения и вычитания матриц:*

1. Ассоциативность http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_691.png
2. http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_692.png, где http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_642.png-[нулевая матрица](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_2.php) соответствующего размера.
3. http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_693.png
4. Коммутативность http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_694.png

**Разностью матриц**http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_422.pngи http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_423.pngодного и того же размера называется матрица http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_744.pngтакого же размера, получаемая из исходных путем прибавления к матрице http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_422.pngматрицы http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_423.png, умноженной на (-1).

На практике же от элементов матрицы http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_422.pngпопросту отнимают соответствующие [элементы матрицы](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_1.php)http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_423.pngпри условии, что заданные матрицы одного размера.

Вычитать можно только матрицы одинакового размера.

**Произведением матрицы*http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_422.png*на ненулевое число**http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_728.pngназывается матрица http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_729.pngтого же порядка, полученная из исходной умножением на заданное [число](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_2_0.php) всех ее элементов:

Умножение матрицы на число

При умножении числа на матрицу, или матрицы на число, получается одинаковый результат, то есть, http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_731.png.

Из определения следует, что общий множитель всех [элементов матрицы](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_1.php) можно выносить за знак матрицы.

Данная операция, вместе с операцией [сложения матриц](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_5.php), относится к линейным [операциям над матрицами](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_3.php).

*Произведением* матрицы http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_698.pngна матрицу http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_699.pngназывается матрица http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_700.pngтакая, что элемент матрицы http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_690.png, стоящий в http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_639.png-ой строке и http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_640.png-ом столбце, т.е. элемент http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_701.png, равен сумме произведений элементов http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_639.png-ой строки матрицы http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_422.pngна соответствующие элементы http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_640.png-ого столбца матрицы http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_423.png:

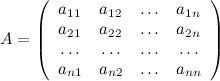
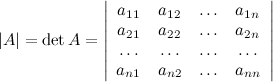
cij = ai1 · b1j + ai2 · b2j + ... + ain · bnj

Две матрицы можно перемножить между собой тогда и только тогда, когда количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы.

## *Свойства умножения матриц*

* (A · B) · C= A · (B · C) - произведение матриц ассоциативно;
* (z · A) · B= z · (A · B), гдеz - число;
* A · (B + C) = A · B + A · C - произведение матриц дистрибутивно;
* En · Anm = Anm · Em= Anm - умножение на [единичную матрицу](http://ru.onlinemschool.com/math/library/matrix/type#h6);
* A · B ≠ B · A - в общем случае произведение матриц не коммутативно.
* Произведением двух матриц есть матрица, у которой столько строк, сколько их у левого сомножителя, и столько столбцов, сколько их у правого сомножителя.

*3.3. Определитель матрицы. Свойства определителей и их вычисление*

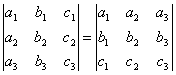
Квадратной матрице http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_128.png-го порядка ставится в соответствие число , называемое **определителем матрицы** или **детерминантом*.***

## *Свойства определителя матрицы*

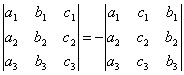
1. Определитель единичной матрицы равен единице:

det(E) = 1

2. Величина определителя не изменится, если все его строки заменить столбцами, причем каждую строку заменить столбцом с тем же номером, то есть

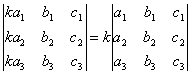
.

3. Перестановка двух столбцов или двух строк определителя равносильна умножению его на -1. Например,

.

4. Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.

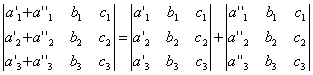
5. Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя на любое число k равносильно умножению определителя на это число k. Например,

.

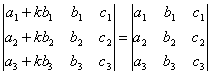
6. Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки равны нулю, то сам определитель равен нулю. Это свойство есть частный случае предыдущего (при k=0).

7. Если соответствующие элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

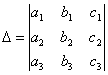
8. Если каждый элемент n-го столбца или n-й строки определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в n-м столбце или соответственно в n-й строке имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой - вторые; элементы, стоящие на остальных местах, у вех трех определителей одни и те же. Например,

.

9. Если к элементам некоторого столбца (или некоторой строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или другой строки), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится. Например,

.

10. Определитель



равен сумме произведений элементов какого-либо столбца (или строки) на их алгебраические дополнения.

## *Вычисление определителей*

Для матрицы первого порядка значение определителя равно значению элемента этой матрицы:

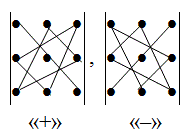
∆ = |a11| = a11

Для матрицы 2×2 значение определителя равно разности произведений элементов главной и побочной диагоналей:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ∆ = | |  |  | | --- | --- | | a11 | a12 | | a21 | a22 | | = a11·a22 - a12·a21 |

*Правило треугольника*

Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком "плюс"; аналогично, для второго определителя - соответствующие произведения берутся со знаком "минус", т.е.

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_813.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_814.png

#### Разложение определителя по строке или столбцу

Определитель матрицы равен сумме произведений элементов строки определителя на их [алгебраические дополнения](http://ru.onlinemschool.com/math/library/matrix/minors/#h2):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | n |  |
| det(A) = | Σ | aij·Aij          - разложение по i-той строке |
|  | j = 1 |  |

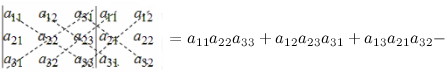
Определитель матрицы равен сумме произведений элементов столбца определителя на их алгебраические дополнения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | n |  |
| det(A) = | Σ | aij·Aij          - разложение по j-тому столбцу |
|  | i = 1 |  |

При разложении определителя матрицы обычно выбирают ту строку/столбец, в которой/ом максимальное количество нулевых элементов.

*Правило Саррюса*

Справа от определителя дописывают первые два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со знаком "плюс"; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком "минус":



http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_819.png

*Приведение определителя к треугольному виду*

С помощью элементарных преобразований над строками или столбцами определитель приводится к треугольному виду и тогда его значение, согласно [свойствам определителя](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_9.php), равно произведению элементов стоящих на главной диагонали.

*3.4. Решение систем линейных уравнений в матричной форме, по формулам Крамера*

## *Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений*

**Минором**http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_796.pngк элементу http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_638.pngопределителя http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_128.png-го порядка называется [определитель](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_9.php)http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_797.png-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_639.png-той строки и http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_640.png-того столбца.

**Алгебраическим дополнением**http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_803.pngк элементу http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_638.pngопределителя http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_128.png-го порядка называется числоАлгебраическое дополнение матрицы

**Невырожденной** называется [квадратная матрица](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_2.php), определитель которой не равен нулю. Квадратная матрица называется **вырожденной**, если ее определитель равен нулю.

Квадратная матрица http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_856.pngназывается **обратной** к невырожденной матрице http://www.webmath.ru/poleznoe/images/vector/formules_422.png, если http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_857.png, где http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_652.png- это единичная матрица соответствующего порядка.

Обратная матрица существует только для **квадратных** матриц с **не равными нулю** [определителями](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_6_9.php).

*Свойства обратной матрицы*

1.  http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_858.png

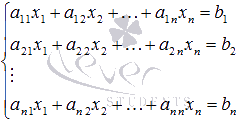
2.    http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_859.png

3.     http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_860.png

4.    http://www.webmath.ru/poleznoe/images/matrix/formules_861.png

*Алгоритм нахождения обратной матрицы* с использованием равенства формула

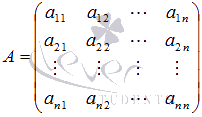
1. Вычисляем определитель матрицы *А* и убеждаемся, что он отличен от нуля (в противном случае матрица *А* необратима).
2. Строим формула- матрицу из алгебраических дополнений элементов формула.
3. Транспонируем матрицу формула, тем самым получаем формула.
4. Умножаем каждый элемент матрицы формулана число формула. Этой операцией завершается нахождение обратной матрицы формула.
5. Проводим проверку результата, вычисляя произведения формулаи формула. Если формула, то обратная матрица найдена верно, в противном случае где-то была допущена ошибка.

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид:, которые в матричной форме записываются как

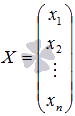
формула,

где:

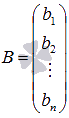
основная матрица системы:

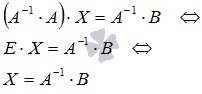


Матрица-столбец неизвестных:



Матрица свободных членов:

.

Пусть для матрицы *А* порядка *n* на *n* существует обратная матрица формула. Умножим обе части матричного уравнения формуласлева на формула(порядки матриц *A ⋅ X* и *В* позволяют произвести такую операцию. Имеем формула. Так как для операции умножения матриц подходящих порядков характерно свойство ассоциативности, то последнее равенство можно переписать как формула, а по определению обратной матрицы формула(*E* – единичная матрица порядка *n* на *n*), поэтому  


Таким образом, решение системы линейных алгебраических уравнений матричным методом определяется по формулеформула.

СИСТЕМУ *n* ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С *n* НЕИЗВЕСТНЫМИ МОЖНО РЕШАТЬ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ОСНОВНОЙ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ ОТЛИЧЕН ОТ НУЛЯ.

*Теорема Крамера.* Пусть http://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image216.gif- определитель матрицы системы А, а http://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image218.gif- определитель матрицы, получаемой из матрицы А заменой http://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image008.gif-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если http://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image221.gif, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам: http://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image223.gif.

Эти формулы получили название *формул Крамера*.

При http://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image216.gif=0 система или не имеет решения (если один из определителей http://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image218.gifhttp://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image225.gif), или имеет бесчисленное множество решений при всех http://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image218.gif=0.

Если система однородна, т.е. все свободные члены равны нулю, то она всегда имеет *нулевое* (тривиальное) решение при http://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image216.gifhttp://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image225.gif;

Если http://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image216.gif=0, то однородная система имеет *ненулевые* решения.

*Элементарные преобразования* системы линейных уравнений, не нарушающие равносильность системы:

1) Вычеркивание уравнения системы, у которой все коэффициенты при неизвестных и свободный член равны нулю. Такое уравнение называется тривиальным.

2) Умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на отличное от нуля число.

3) Замена http://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image229.gif-го уравнения системы уравнением, которое получается путем почленного сложения http://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image158.gif-го и http://ok-t.ru/studopediaru/baza4/2180133227.files/image008.gif-го уравнений системы.

**Тема №5 «Элементы теории вероятностей»**

**1. Вопросы занятия:**

1.1. Формулы комбинаторики

1.2. Вероятность события

1.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1.4. Формула полной вероятности

1.5. Повторение испытаний. Формула Бернулли

1.6. Дискретная случайная величина и закон ее распределения

1.7. Числовые характеристики дискретной случайной величины

**2. Литература.**

**Основная литература**

1.Седых И.Ю.Математика [электронный курс]: [Текст]: учебник и практикум для СПО/И.Ю.Седых.-М.: Издательство Юрайт,2017.-443с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/CAB1548F-63AC-4C3F-8E82-C9B841E8F0A1#page/2>

2.Дорофеева В.А. Математика[электронный курс]: [Текст]: учебник для СПО/В.А.Дорофеева.-М.: Издательство Юрайт,2017.-400с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/B646843F-0131-41C8-AEB6-B4C37ED1E97F#page/4>

3.Богомолов Н.В.Математика.Ззадачи с решениями. В 2ч.Ч.2[электронный курс]: [Текст]:учебное пособие для СПО /Н.В.Богомолов.-М.: Издательство Юрайт,2017.-285с. (электронный ресурс) <https://www.biblio-online.ru/viewer/0523A6DF-2657-4F49-8ACE-1B790E30D8C8#page/2>

**Дополнительная литература**

1. Богомолов Н.В. Математика [Текст]: учебник для СПО / Н.В. Богомолов.- М.: Юрайт, 2015.- 396 с.

**3. Краткое содержание вопросов**

3.1. Формулы комбинаторики

*Размещением* из *n* элементов по *m*в комбинаторике называется любой упорядоченный набор из *m* различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в *n* элементов.

Число размещений в комбинаторике обозначается Anm и вычисляется по формуле:   
комбинаторика

**Сочетанием** из *n* элементов по *m* в комбинаторике называется любой **неупорядоченный набор** из **m** различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в**n** элементов.

Число сочетаний обозначается Cnm и вычисляется по формуле:   
формула сочетаний

*Перестановкой* из *n* элементов называется любой упорядоченный набор этих элементов.

Число различных перестановок из n элементов обозначается Pn и вычисляется по формуле Pn=n!.

3.2. Вероятность события

Несколько событий образуют *полную группу (пространство исходов)*, если в результате испытания появиться хотя бы одно из них.

*Вероятностью P(A)* события *А* называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Вероятность P(A) события *А* определяется по формуле:

http://umk.portal.kemsu.ru/uch-mathematics/papers/posobie/vim01.gif,

где *m*– число элементарных исходов, благоприятствующих *A;n* – число всех возможных элементарных исходов испытания.

*3.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей*

*Теорема сложения вероятностей*

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:

Р (А + В) = Р (А) + Р (В).

В случае, когда события А и В *совместны*, вероятность их суммы выражается формулой:

Р (А +В) = Р (А) + Р (В) – Р (АВ),

где АВ – произведение событий А и В.

Два события называются *зависимыми*, если вероятность одного из них зависит от наступления или не наступления другого. В случае зависимых событий вводится понятие условной вероятности события.

*Условной вероятностью* Р(А/В) события А называется вероятность события А, вычисленная при условии, что событие В произошло. Аналогично через Р(В/А) обозначается условная вероятность события В при условии, что событие А наступило.

*Произведением* двух событий *А и В* называется событие С, состоящее в совместном появлении события А и события В.

# *Теорема  умножения вероятностей*

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:

Р (АВ) = Р(А) · Р(В/А), или Р (АВ) = Р(В) · Р(А/В).

*Следствие*. Вероятность совместного наступления двух независимых  событий А и В равна произведению вероятностей этих событий:

Р (АВ) = Р(А) · Р(В).

3.4. Формула полной вероятности

Если событие *А* может произойти только при выполнении одного из событий

http://www.matburo.ru/tv/tvbook/par_1_6.files/image002.gif, которые образуют *полную группу несовместных событий*, то вероятность события *А* вычисляется по формуле

http://www.matburo.ru/tv/tvbook/par_1_6.files/image004.gif.

Формула Байеса

http://www.matburo.ru/tv/tvbook/par_1_6.files/image012.gif

*3.5. Повторение испытаний. Формула Бернулли*

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми относительно события А.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события одинакова и равна p(http://primer.by/_mod_files/ce_images/tvims1/image072.png) , событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), равна

http://primer.by/_mod_files/ce_images/tvims1/image074.png - Формула Бернулли

Если:

Событие А появится менее k раз

http://primer.by/_mod_files/ce_images/tvims1/image078.png

Событие А появится более k раз

http://primer.by/_mod_files/ce_images/tvims1/image080.png

    Событие А появится не менее k раз

http://primer.by/_mod_files/ce_images/tvims1/image082.png Событие А появится не более k раз

http://primer.by/_mod_files/ce_images/tvims1/image084.png, где каждое из слагаемых находится по формуле Бернулли.

*3.6. Дискретная случайная величина и закон ее распределения*

Переменная величина называется *случайной*, если в результате опыта она может принимать действительные значения с определёнными вероятностями.

Дискретная случайная величина – у нее значения меняются скачкообразно, а не плавно, то есть могут принять лишь некоторые заранее вычисленные значения.

*Закон распределения* дискретной случайной величины – это перечень всех возможных значений дискретной случайной величины и соответствующих вероятностей.

Закон распределения можно задать в виде таблицы, формулы или графически. При табличном задании закона распределения в первой строке таблицы записываются возможные значения случайной величины, а во второй – соответствующие значениям вероятности:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X |  |  | … |  |
| *p* |  |  | … |  |

Сумма всех вероятностей *Σpi = 1*.

3.7. Числовые характеристики дискретной случайной величины

*Математическое ожидание* дискретной случайной величины есть сумма произведений всех её возможных значений на их вероятности:  
M(X) = x1p1 + x2p2 + ... + xnpn

*Свойства математического ожидания*.  
1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой величине:  
М(С) = С  
2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:  
М(СХ) = С·М(Х)

3) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:  
М(Х1 + Х2 + …+ Хn) = М(Х1) + М(Х2) + ... + М(Хn)  
4) Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:  
М(Х1 · Х2 · ... · Хn) = М(Х1) · М(Х2) · ... · М(Хn)

*Дисперсия* дискретной случайной величины есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:  
D(X) = (x1 - M(X))2p1 + (x2 - M(X))2p2 + ... + (xn- M(X))2pn = x21p1 + x22p2 + ... + x2npn - [M(X)]2

*Свойства дисперсии*.  
1) Дисперсия постоянной величины равна нулю: D(С) = 0  
2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: D(СХ) = С2 · D(Х)  
3) Дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых: D(Х1 ± Х2 ± ... ± Хn) = D(Х1) + D(Х2) + ... + D(Хn)

*Среднее квадратическое отклонение* дискретной случайной величины, оно же стандартное отклонение или среднее квадратичное отклонение есть корень квадратный из дисперсии:  
σ(X) = √D(X)